Exercícios Cálculo - Área 2

Carlos Campani

14 de junho de 2011

1. (p. 87, exerc. 11) Use o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir explique por quê.

   (a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

   (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

2. (p. 87, exerc. 12) Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

3. (p. 88, exerc. 25, 27, 29 e 31) Determine o limite infinito:

   (a)

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{6}{x-5}$$

   (b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$$

   (c)

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$$

(d)

$$\lim_{x \to (-\pi/2)^-} \sec x$$

4. (p. 88, exerc. 34) Encontre as assíntotas verticais da função:

$$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

Confirme sua resposta fazendo o gráfico da função.

5. (p. 88, exerc. 40) Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

6. (p. 95, exerc. 3-9) Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedades dos limites que forem usadas:

   (a) $\lim_{x\to 4}(5x^2-2x+3)$
   (b) $\lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3}$
   (c) $\lim_{x\to 8}(1+\sqrt[3]{x})(2-6x^2+x^3)$
   (d) $\lim_{t\to -1}(t^2+1)^3(t+3)^5$
   (e) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$
   (f) $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6}$
   (g) $\lim_{x\to 4^-}\sqrt{16-x^2}$

7. (p. 95-96, exerc. 11-30) Calcule o limite, se existir:

   (a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$
   (b) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$
   (c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+6}{x-2}$
   (d) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

(e) $\lim_{t\to -3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

(f) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-4x}{x^3-3x-4}$

(g) $\lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2-16}{h}$

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

(i) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+8}$

(j) $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$

(k) $\lim_{t\to 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

(l) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

(m) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

(n) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

(o) $\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

(p) $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+t}\right)$

(q) $\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

(r) $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

(s) $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t}\right)$

(t) $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

8. (Leithold, p. 76-77, exerc. 1-3, 22) Faça um esboço do gráfico e ache o limite indicado, se existir; se não existir, indique a razão disto:

   (a)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ -3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

   i. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$
   ii. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$
   iii. $\lim_{x\to 1} f(x)$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

i. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
ii. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
iii. $\lim_{x\to 0} f(x)$

(c)

$$f(t) = \begin{cases} t+4 & \text{se } t \leq -4 \\ 4-t & \text{se } t > -4 \end{cases}$$

i. $\lim_{t\to -4^+} f(t)$
ii. $\lim_{t\to -4^-} f(t)$
iii. $\lim_{t\to -4} f(t)$

(d)

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1} & \text{se } t \leq -1 \\ \sqrt{1-t^2} & \text{se } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t-1} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

i. $\lim_{t\to -1^+} g(t)$
ii. $\lim_{t\to -1^-} g(t)$
iii. $\lim_{t\to -1} g(t)$
iv. $\lim_{t\to 1^+} g(t)$
v. $\lim_{t\to 1^-} g(t)$
vi. $\lim_{t\to 1} g(t)$

9. (p. 96, exerc. 33) Use o teorema do confronto (teorema do sanduíche) para calcular $\lim_{x\to 0}(x^2 \cos 20\pi x)$. Ilustre sua resposta fazendo os gráficos das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$.

10. (p. 96, exerc. 34) Use o teorema do confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \sin \frac{\pi}{x} = 0$.

11. (p. 96, exerc. 37) Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

12. (p. 96, exerc. 39, 41 e 43) Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique o por quê.

    (a) $\lim_{x\to 3}(2x + |x-3|)$

    (b) $\lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

    (c) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$

13. (p. 96, exerc. 45) A função sinal, denotada por f, é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

    (a) Esboce o gráfico da função.

    (b) Encontre ou explique porque não existe cada um dos limites a seguir:

        i. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

        ii. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

        iii. $\lim_{x\to 0} f(x)$

        iv. $\lim_{x\to 0} |f(x)|$

14. (p. 96, exerc. 46) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

    (a) Encontre $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

    (b) Existe $\lim_{x\to 2} f(x)$?

    (c) Esboce o gráfico de f.

15. Na teoria da relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

    expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

16. (p. 101, exemplo 2) Demonstre, usando a definição precisa de limite, que $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$.

17. (p. 106, exerc. 19 e 21) Demonstre, usando a definição precisa de limite:

    (a) $\lim_{x\to 3}\frac{x}{5}=\frac{3}{5}$

    (b) $\lim_{x\to -5}\left(4-\frac{3x}{5}\right)=7$

18. (p. 128, exerc. 15, 17 e 19) Encontre o limite:

    (a) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x+3}$

    (b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{1-x-x^2}{2x^2-7}$

    (c) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$

19. (p. 115, exerc. 5) Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda parte exceto em $x=3$ e é contínua à esquerda em 3.

20. (p. 115-116, exerc. 10-12) Use a definição de continuidade e propriedades dos limites para demonstrar que a função é contínua em um dado ponto a:

    (a) $f(x)=x^2+\sqrt{7-x}$, $a=4$

    (b) $f(x)=(x+2x^3)^4$, $a=-1$

    (c) $h(t)=\frac{2t-3t^2}{1+t^3}$, $a=1$

21. (p. 116, exerc. 15, 17 e 19) Explique por que a função é descontínua no ponto a dado. Esboce o gráfico da função.

    (a) $f(x)=\ln|x-2|$, $a=2$

    (b)
    $$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{se } x<0 \\ x^2 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}, \quad a=0$$

    (c)
    $$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ 1-x^2 & \text{se } x>0 \end{cases}, \quad a=0$$